

УДК 539.67

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТАРЕЮЩЕГО ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ<sup>1</sup>

© 2003 С.А. Лычёв<sup>2</sup>

В работе предлагается схема экспериментального определения параметров внутреннего трения вязкоупругого стареющего материала. В ходе эксперимента определяется динамическая реакция вращающегося изгибаемого стержня при действии нестационарного нагружения, изменяющегося по заданному закону. Построена математическая модель эксперимента в двух постановках: технической теории вязкоупругого стержня (в рамках гипотез Бернулли), с учетом инерции поворота сечений, и уточненной теории С.П. Тимошенко, с учетом деформаций сдвига. Произведен анализ спектральных свойств соответствующих операторных пучков и построены спектральные разложения перемещений оси стержня из инвариантного вязкоупругого материала и из стареющего материала в предположении, что параметр внутреннего трения изменяется во времени линейно.

### Введение

Исследование динамической реакции стареющих вязкоупругих сред представляет как теоретический, так и прикладной интерес. К задачам подобного типа следует отнести моделирование нестационарных колебаний быстростареющих гелей, используемых в нефтедобыче, динамики растущих тел [1] и геотектонических процессов в мантии земли [2]. Особенность указанного класса задач состоит в том, что скорость изменения вязкоупругих параметров материала соизмерима со скоростью распространения звуковых волн в нем, и принцип "замораживания", приводящий к разделению времени на "быстрое" и "медленное", не может быть применен [3].

---

<sup>1</sup> Представлена доктором физико-математических наук, профессором Ю.Н. Радаевым.

<sup>2</sup> Лычёв Сергей Александрович, кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

В ряде случаев удается проинтегрировать уравнения движения, сначала действуя на них интегральным преобразованием по пространственной координате, а затем решая начальную задачу с переменными коэффициентами в пространстве изображений. Такой ход решения позволяет получать замкнутые представления и для нестареющего материала, поскольку при этом исключается процедура обращения преобразования Лапласа, выполняемая, как правило, численно [4, 5].

В настоящей статье осуществлены техническая и уточненная постановки, а также построены замкнутые решения нестационарных начально-краевых задач для вращающегося вязкоупругого стержня из инвариантного и стареющего материала, специализированные для проведения эксперимента по определению параметров внутреннего трения. Описание принципиальной схемы эксперимента приведено в разделе 1. В разделах 2,3 осуществлены постановки задачи, учитывающие а) инерцию вращения сечений (поправка Рэлея) и б) деформацию сдвига (теория Тимошенко). Спектральному анализу несамосопряженных операторных пучков, порождаемых этими постановками, посвящены разделы 4, 5. В разделе 6 построены представления решений для инвариантного материала в форме спектральных разложений для наиболее общих — упругих способов закрепления стержня, а в разделе 7 — для стареющего материала Фойгта в предположении, что параметр внутреннего трения изменяется линейно.

## 1. Экспериментальная установка

Один из эффективных способов определения вязкоупругих параметров — экспериментальное определение динамической реакции вращающегося стержня [6]. Вращение позволяет "отделить" параметры вязкости, поскольку при такой "механической" поляризации возникают перемещения в плоскости, перпендикулярной плоскости действия нагрузки, что связано со специфичным для вязкоупругих сред отставанием по фазе деформаций от напряжений.

Принципиальные схемы возможных экспериментальных установок приведены на рис.1. В схеме рис. 1,а вращающийся стержень из немагнитного вязкоупругого материала шарнирно закреплен с двух концов, на схеме рис 1,б он жестко закреплен во вращающемся патроне с одного конца. Техническая реализация схемы рис. 1,б проще, однако, как будет показано ниже, теоретические представления измеряемых величин, соответствующих схеме рис. 1,а, имеют удобную для вычислений замкнутую форму.

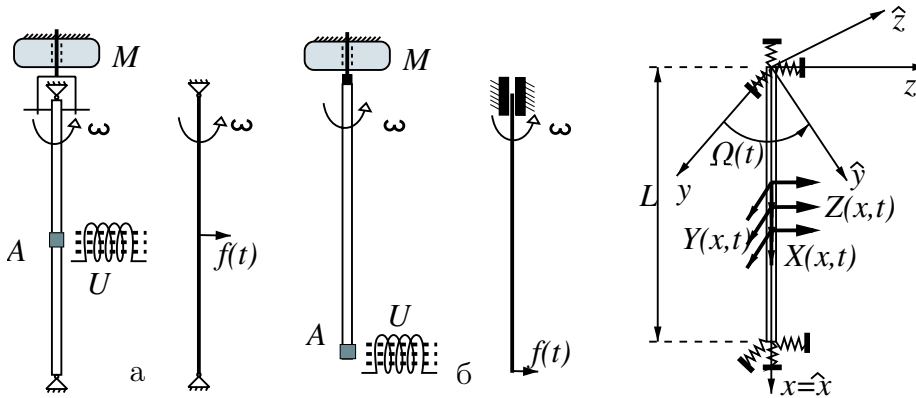


Рис. 1. Схема эксперимента

Рис. 2. Расчетная схема

Поясним схему измерений. Электродвигатель  $M$  осуществляет вращение стержня с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , нестационарное поперечное нагружение  $f(t)$  осуществляется электромагнитом  $U$ , воздействующим на легкую магнитную вставку  $A$ . На обмотку электромагнита подаются импульсы заданной формы и частоты. Посредством импульсной лазерной интерферометрии определяются перемещения стержня в плоскости, перпендикулярной плоскости действия внешней нагрузки.

Для идентификации параметров материала желательно располагать математической моделью эксперимента, позволяющей получить аналитические представления для динамической реакции. Наиболее точной является модель цилиндра в постановке теории вязкоупругости с неинвариантным во времени ядром наследственности. Определение перемещений в такой трехмерной постановке представляет сложную в теоретическом плане задачу, решение которой, даже при отсутствии вращения и старения материала, получено лишь для частных случаев крайних условий [7, 8].

Значительно проще постановка соответствующей задачи в рамках асимптотических теорий в предположении, что поперечные размеры стержня значительно меньше его длины. Так, в работе [9] исследовались поперечные колебания вращающегося стержня из материала Фойгта в постановке технической теории стержней. Следует отметить, что даже в этом случае, несмотря на элементарную постановку, построение аналитических решений сопряжено со значительными трудностями, связанными с существенной несамосопряженностью получаемых начально-краевых задач<sup>3</sup>. Вместе с тем техническая постановка

<sup>3</sup>Здесь уместно напомнить о физической причине несамосопряженности — как уже отмечалось, вращение механически "поляризует" задачу.

является весьма грубым приближением для исследования нестационарной динамики, а соответствующие уравнения движения не являются волновыми. В связи с этим представляют интерес модели "промежуточного" уровня, основанные на уточненной (волновой) теории стержней.

## 2. Уравнения движения в технической постановке

Рассмотрим стержень длиной  $L$  и постоянным круглым сечением с площадью  $A$  и моментом инерции  $I$ , который вращается с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 2). Стержень изготовлен из изотропного вязкоупругого материала с модулем упругости  $E$ , коэффициентом Пуассона  $\mu$  и плотностью  $\rho$ .

Введем две системы координат — неподвижную и вращающуюся вместе со стержнем. Неподвижные оси обозначим через  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ , подвижные через  $\hat{x}_1 = \hat{x}, \hat{x}_2 = \hat{y}, \hat{x}_3 = \hat{z}$ . Ориентация осей указана на рис. 2. Координаты  $\hat{x}_i$  и  $x_i$  связаны зависимостью

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Omega & \sin \Omega \\ 0 & -\sin \Omega & \cos \Omega \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Здесь  $\Omega$  — фаза поворота стержня. В дальнейшем проекции на подвижные оси будем обозначать символами с крышкой.

В соответствии с кинематическими гипотезами технической теории [10] принимаем, что проекции перемещений точек стержня  $\hat{U}_1, \hat{U}_2, \hat{U}_3$  на подвижные оси изменяются по законам

$$\hat{U}_1 = \hat{U} = \hat{u} - \hat{y} \hat{v}_x - \hat{z} \hat{w}_x, \quad \hat{U}_2 = \hat{V} = \hat{v}, \quad \hat{U}_3 = \hat{W} = \hat{w}, \quad (2.2)$$

где  $\hat{u}_1 = \hat{u}, \hat{u}_2 = \hat{v}, \hat{u}_3 = \hat{w}$  — перемещения точек оси симметрии стержня. При этом компоненты тензора деформаций  $\hat{\epsilon}_{ij}$  могут быть записаны следующим образом:

$$\hat{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{U}_{i,j} + \hat{U}_{j,i}) = \begin{pmatrix} \hat{u}_x - \hat{y} \hat{v}_{xx} - \hat{z} \hat{w}_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Здесь и в дальнейшем индексы  $x$  и  $t$  означают дифференцирование по соответствующей переменной.

Энергия упругого деформирования  $\Pi$  изотропного стержня определяется через модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\mu$  согласно [11]

$$\Pi = \frac{E}{2(1+\mu)} \left( \hat{\epsilon}_{ij} \hat{\epsilon}_{ij} + \frac{\mu}{1-2\mu} \hat{\epsilon}_{ii}^2 \right), \quad (2.4)$$

которая после подстановки соотношений (2.3) и интегрирования по площади сечения принимает вид <sup>4</sup>

$$\Pi = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^L (A\hat{u}_x^2 + I\hat{v}_{xx}^2 + I\hat{w}_{xx}^2) dx, \quad \varepsilon = \frac{E(1-\mu)}{(1-\mu-2\mu^2)}. \quad (2.5)$$

Кинетическая энергия вращающегося стержня  $T$  включает в себя гироскопические слагаемые:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A [\hat{U}_t^2 + \hat{V}_t^2 + \hat{W}_t^2 + \Omega_t^2(\hat{V}^2 + \hat{W}^2) + 2\Omega_t(\hat{V}\hat{W}_t - \hat{W}\hat{V}_t)] \rho dA dx.$$

После интегрирования по площади сечения приходим к такому выражению

$$T = \frac{\rho}{2} \int_0^L [I(\hat{v}_{xt}^2 + \hat{w}_{xt}^2) + A(\hat{u}_t^2 + \hat{v}_t^2 + \hat{w}_t^2 + \Omega_t^2(\hat{v}^2 + \hat{w}^2) + 2\Omega_t(\hat{v}\hat{w}_t - \hat{w}\hat{v}_t))] dx. \quad (2.6)$$

Диссипация механической энергии, вызываемая внутренним трением, определяется через диссипативную функцию Рэлея

$$R = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \eta \hat{\varepsilon}_{ij}^2 dA dx = \frac{\eta}{2} \int_0^L [A\hat{u}_{xt}^2 + I\hat{v}_{xxt}^2 + I\hat{w}_{xxt}^2] dx, \quad \hat{\varepsilon}_{ij} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \hat{\varepsilon}_{ij}.$$

Заметим, что в рамках кинематических гипотез технической теории (2.2) функция Рэлея зависит от единственного параметра  $\eta$ .

Работа потенциальных внешних сил, приложенных к оси стержня, и реактивных усилий в опорах может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} Q = & \frac{1}{2} [\alpha_0 \hat{u}^2 + \beta_0 (\hat{v}^2 + \hat{w}^2) + \gamma_0 (\hat{v}_x^2 + \hat{w}_x^2)] |_{x=0} + \\ & + \frac{1}{2} [\alpha_L \hat{u}^2 + \beta_L (\hat{v}^2 + \hat{w}^2) + \gamma_L (\hat{v}_x^2 + \hat{w}_x^2)] |_{x=L} - \int_0^L (\hat{X}\hat{u} + \hat{Y}\hat{v} + \hat{Z}\hat{w}) dx, \quad (2.7) \end{aligned}$$

где  $\alpha_{0,L}$ ,  $\beta_{0,L}$ ,  $\gamma_{0,L}$  — упругие характеристики опор,  $\hat{X}$ ,  $\hat{Y}$ ,  $\hat{Z}$  — проекции внешней нагрузки на вращающиеся оси.

Для вывода уравнений движения и краевых условий воспользуемся уравнениями Лагранжа [12], которые в принятых обозначениях

<sup>4</sup>Используемый здесь модуль растяжения  $\varepsilon$  не совпадает с  $E$ , что связано с невыполнением при произвольном значении коэффициента Пуассона  $\mu$  статических гипотез технической теории.

имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\hat{u}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \hat{u}_i} = -\frac{\partial R}{\partial \hat{u}_i}, \quad L = T - \Pi - \mathcal{Q}, \quad \dot{\hat{u}}_i \equiv \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.8)$$

Выполняя интегрирование по частям, приходим к уравнениям движения во вращающейся системе координат

$$\begin{aligned} A\rho\hat{u}_{tt} - A\varepsilon\hat{u}_{xx} - A\eta\hat{u}_{xxt} &= \hat{X}, \\ I\varepsilon\hat{v}_{xxxx} + I\eta\hat{v}_{xxxxt} - I\rho\hat{v}_{xxtt} + A\rho\hat{v}_{tt} - A\rho\Omega_t^2\hat{v} - 2A\rho\Omega_t\hat{v}_t - A\rho\Omega_{tt}\hat{v} &= \hat{Y}, \\ I\varepsilon\hat{w}_{xxxx} + I\eta\hat{w}_{xxxxt} - I\rho\hat{w}_{xxtt} + A\rho\hat{w}_{tt} - A\rho\Omega_t^2\hat{w} + 2A\rho\Omega_t\hat{w}_t + A\rho\Omega_{tt}\hat{w} &= \hat{Z} \end{aligned} \quad (2.9)$$

и соответствующим краевым условиям

$$\begin{aligned} [\varepsilon A\hat{u}_x + \eta A\hat{u}_{xt} \mp \alpha_{0,L}\hat{u}]|_{x=0,L} &= 0, \\ [\varepsilon I\hat{v}_{xxx} + \eta I\hat{v}_{xxxxt} \pm \beta_{0,L}\hat{v}]|_{x=0,L} &= [\varepsilon I\hat{w}_{xxx} + \eta I\hat{w}_{xxxxt} \pm \beta_{0,L}\hat{w}]|_{x=0,L} = 0, \\ [\varepsilon I\hat{v}_{xx} + \eta I\hat{v}_{xxt} \mp \gamma_{0,L}\hat{v}_x]|_{x=0,L} &= [\varepsilon I\hat{w}_{xx} + \eta I\hat{w}_{xxt} \mp \gamma_{0,L}\hat{w}_x]|_{x=0,L} = 0. \end{aligned}$$

Наконец, переходя к проекциям на неподвижные оси, действуя на систему уравнений (2.9) преобразованием  $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{S}$  (через  $\mathbf{L}$  обозначен матричный дифференциальный оператор, соответствующий системе (2.9), а  $\mathbf{S}$  — преобразование (2.1)), получаем уравнения движения в неподвижной системе координат

$$\begin{aligned} A\rho u_{tt} - A\varepsilon u_{xx} - A\eta u_{xxt} &= X, \\ I\varepsilon v_{xxxx} + I\eta v_{xxxxt} - I\rho v_{xxtt} + A\rho v_{tt} + I\eta\Omega_t w_{xxxx} + I\rho\Omega_t^2 v_{xx} - \\ - I\rho\Omega_{tt} w_{xx} - 2I\rho\Omega_t w_{xt} &= Y, \\ I\varepsilon w_{xxxx} + I\eta w_{xxxxt} - I\rho w_{xxtt} + A\rho w_{tt} - I\eta\Omega_t v_{xxxx} + I\rho\Omega_t^2 w_{xx} + \\ + I\rho\Omega_{tt} v_{xx} + 2I\rho\Omega_t v_{xt} &= Z, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{pmatrix}.$$

Первое уравнение (2.10) соответствует продольным колебаниям, которые не связаны с изгибными, и для настоящего исследования не представляет интереса. Уравнения изгибных колебаний запишем в операторной форме:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 \mathbf{u} + \mathcal{A}_1 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \mathcal{A}_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} &= \mathbf{f}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}, \\ \mathcal{A}_0 &= \begin{pmatrix} B & Bk\omega \\ -Bk\omega & B \end{pmatrix} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \begin{pmatrix} \mathcal{M}\omega^2 & -\mathcal{M}\epsilon \\ \mathcal{M}\epsilon & \mathcal{M}\omega^2 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ \mathcal{A}_1 &= \begin{pmatrix} Bk & 0 \\ 0 & Bk \end{pmatrix} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \begin{pmatrix} 0 & -2\mathcal{M}\omega \\ 2\mathcal{M}\omega & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} -\mathcal{M} & 0 \\ 0 & -\mathcal{M} \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}.$$

В соотношениях (2.11) использованы обозначения для жесткости стержня  $B = A\mathcal{E}$ , коэффициента внутреннего трения  $k = \eta/\mathcal{E}$ , инерционных характеристик сечения  $\mathcal{M} = I\rho$ ,  $m = A\rho$ . Угловая скорость и ускорение вращения стержня обозначены через  $\omega = \Omega_t$ ,  $\epsilon = \Omega_{tt}$ .

Область определения операторов  $\mathcal{A}_0, \dots, \mathcal{A}_3$  задается оператором  $\mathcal{B}$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\mathbf{u} &= \left( [\mathcal{B}_q(0)\mathbf{u}]|_{x=0}^\top \quad [\mathcal{B}_q(L)\mathbf{u}]|_{x=L}^\top \quad [\mathcal{B}_m(0)\mathbf{u}]|_{x=0}^\top \quad [\mathcal{B}_m(L)\mathbf{u}]|_{x=L}^\top \right)^\top, \\ \mathcal{B}_q(0, L) &= \begin{pmatrix} B & Bk\omega \\ -Bk\omega & B \end{pmatrix} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \begin{pmatrix} Bk & 0 \\ 0 & Bk \end{pmatrix} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial t} \pm \begin{pmatrix} \beta_{0,L} & 0 \\ 0 & \beta_{0,L} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{B}_m(0, L) &= \begin{pmatrix} B & Bk\omega \\ -Bk\omega & B \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \begin{pmatrix} Bk & 0 \\ 0 & Bk \end{pmatrix} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \mp \begin{pmatrix} \gamma_{0,L} & 0 \\ 0 & \gamma_{0,L} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Если не учитывать инерцию вращения сечений, положив  $\mathcal{M} = 0$ , то из соотношений (2.11)–(2.12) получаются известные уравнения [9].

Отметим два частных типа краевых условий, соответствующих схемам экспериментов: шарнирное закрепление (схема а,  $\alpha_{0,L} \rightarrow \infty$ ,  $\beta_{0,L} = 0$ )

$$\mathbf{u}|_{x=0} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{u}|_{x=0} = 0, \quad \mathbf{u}|_{x=L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{u}|_{x=L} = 0, \quad (2.13)$$

консольное защемление (схема б,  $\alpha_0, \beta_0 \rightarrow \infty$ ,  $\alpha_L = \beta_L = 0$ )

$$\mathbf{u}|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u}|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{u}|_{x=L} = \frac{\partial^3}{\partial x^3} \mathbf{u}|_{x=L} = 0. \quad (2.14)$$

Дифференциальные уравнения (2.11), краевые условия (2.12) или (2.13), (2.14) совместно с начальными условиями

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{v}_0 \quad (2.15)$$

определяют математическую формулировку задачи в постановке технической теории.

### 3. Уравнения движения в постановке Тимошенко

Кинематические гипотезы, принимаемые в теории стержней с конечной сдвиговой жесткостью (теория Тимошенко), определяют перемещения

$$\hat{U}_1 = \hat{U} = \hat{u} - \hat{y} \hat{\phi} - \hat{z} \hat{\psi}, \quad \hat{U}_2 = \hat{V} = \hat{v}, \quad \hat{U}_3 = \hat{W} = \hat{w} \quad (3.1)$$

через пять функций: три из них ( $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ ) соответствуют перемещениям точек оси симметрии стержня, а две ( $\hat{\phi}, \hat{\psi}$ ) — углам поворота сечений.

При этом компоненты тензора деформаций  $\hat{\varepsilon}_{ij}$  принимают вид

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \begin{pmatrix} \hat{u}_x - \hat{y} \hat{\varphi}_x - \hat{z} \hat{\psi}_x & \frac{1}{2}(\hat{\varphi} - \hat{v}_x) & \frac{1}{2}(\hat{\psi} - \hat{w}_x) \\ \frac{1}{2}(\hat{\varphi} - \hat{v}_x) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(\hat{\psi} - \hat{w}_x) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

а энергия упругого деформирования  $\Pi$  после подстановки (3.2) в (2.4) и последующего интегрирования по площади сечения формулируется следующим образом:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \mathcal{E}(I\hat{\varphi}_x^2 + I\hat{\psi}_x^2 + A\hat{u}_x^2) + \mathcal{G}A((\hat{\varphi} - \hat{v}_x)^2 + (\hat{\psi} - \hat{w}_x)^2) \right] dx, \quad (3.3)$$

где  $\mathcal{G} = k' \frac{E}{2(1 + \mu)}$ ,  $k' = \frac{2}{3}$  — коэффициент поперечного сдвига, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по сечению стержня [13]. Заметим, что представление (3.3) зависит, в отличие от (2.5), от двух упругих характеристик  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{G}$ , имеющих смысл модулей растяжения и сдвига.

Кинетическая энергия  $T$  определяется выражением, аналогичным (2.6):

$$T = \frac{\rho}{2} \int_0^L \left[ I(\hat{\varphi}_t^2 + \hat{\psi}_t^2) + A(\Omega_t^2(\hat{v}^2 + \hat{w}^2) + 2\Omega_t(\hat{v}\hat{w}_t - \hat{w}\hat{v}_t) + u_t^2 + \hat{v}_t^2 + \hat{w}_t^2) \right] dx.$$

Диссипативная функция зависит от двух параметров  $\eta$  и  $\xi$ :

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \left[ \xi(\hat{\varepsilon}_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\hat{\varepsilon}_{ll})^2 + \frac{\eta}{2}\hat{\varepsilon}_{ll}^2 \right] dA dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[ (\eta + \frac{4}{3}\xi)(I\hat{\varphi}_{xt}^2 + I\hat{\psi}_{xt}^2 + A\hat{u}_{xt}^2) + A\xi((\hat{\varphi}_t - \hat{v}_{xt})^2 + (\hat{\psi}_t - \hat{w}_{xt})^2) \right] dx. \end{aligned}$$

Работа внешних и реактивных сил выражается формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \frac{1}{2} [\alpha_0 \hat{u}^2 + \beta_0 (\hat{v}^2 + \hat{w}^2) + \gamma_0 (\hat{\varphi}^2 + \hat{\psi}^2)]|_{x=0} + \\ &+ \frac{1}{2} [\alpha_L \hat{u}^2 + \beta_L (\hat{v}^2 + \hat{w}^2) + \gamma_L (\hat{\varphi}^2 + \hat{\psi}^2)]|_{x=L} - \int_0^L (\hat{X}\hat{u} + \hat{Y}\hat{v} + \hat{Z}\hat{w}) dx, \end{aligned}$$

где, как и в (2.7),  $\alpha_{0,L}$ ,  $\beta_{0,L}$ ,  $\gamma_{0,L}$  — упругие характеристики опор,  $\hat{X}$ ,  $\hat{Y}$ ,  $\hat{Z}$  — проекции внешней нагрузки на вращающиеся оси.



Из уравнений Лагранжа (2.8) вытекают уравнения движения в подвижной системе координат

$$\begin{aligned} A\rho\hat{u}_{tt} - A\varepsilon\hat{u}_{xx} - A\left(\eta + \frac{4}{3}\xi\right)\hat{u}_{xxt} &= \hat{X}, \\ A\rho\hat{v}_{tt} - A\mathcal{G}\hat{v}_{xx} - A\rho\Omega_t^2\hat{v} - A\rho\Omega_{tt}\hat{v} - 2A\rho\Omega_t\hat{v}_t + A\mathcal{G}\hat{\varphi}_x - A\xi\hat{v}_{xxt} + A\xi\hat{\varphi}_{xt} &= \hat{Y}, \\ A\rho\hat{w}_{tt} - A\mathcal{G}\hat{w}_{xx} - A\rho\Omega_t^2\hat{w} + A\rho\Omega_{tt}\hat{w} + 2A\rho\Omega_t\hat{w}_t + A\mathcal{G}\hat{\psi}_x - A\xi\hat{w}_{xxt} + A\xi\hat{\psi}_{xt} &= \hat{Z}, \\ I\rho\hat{\varphi}_{tt} - I\varepsilon\hat{\varphi}_{xx} + A\mathcal{G}\hat{\varphi} + A\xi\hat{\varphi}_t - A\mathcal{G}\hat{v}_x - A\xi\hat{v}_{xt} - I\left(\eta + \frac{4}{3}\xi\right)\hat{\varphi}_{xxt} &= 0, \\ I\rho\hat{\psi}_{tt} - I\varepsilon\hat{\psi}_{xx} + A\mathcal{G}\hat{\psi} + A\xi\hat{\psi}_t - A\mathcal{G}\hat{w}_x - A\xi\hat{w}_{xt} - I\left(\eta + \frac{4}{3}\xi\right)\hat{\psi}_{xxt} &= 0 \end{aligned}$$

и соответствующие краевые условия

$$\begin{aligned} [A\varepsilon\hat{u}_x + A\left(\eta + \frac{2}{3}\xi\right)\hat{u}_{xt} \mp \alpha_{0,L}\hat{u}]|_{x=0,L} &= 0, \\ [A\mathcal{G}(\hat{v}_x - \hat{\varphi}) + A\eta(\hat{v}_{xt} - \hat{\varphi}_t) \mp \beta_{0,L}\hat{v}]|_{x=0,L} &= 0, \\ [A\mathcal{G}(\hat{w}_x - \hat{\psi}) + A\eta(\hat{w}_{xt} - \hat{\psi}_t) \mp \beta_{0,L}\hat{w}]|_{x=0,L} &= 0, \\ [I\varepsilon\hat{\varphi}_x + I\left(\eta + \frac{4}{3}\xi\right)\hat{\varphi}_{xt} \mp \gamma_{0,L}\hat{v}_x]|_{x=0,L} &= 0, \\ [I\varepsilon\hat{\psi}_x + I\left(\eta + \frac{4}{3}\xi\right)\hat{\psi}_{xt} \mp \gamma_{0,L}\hat{w}_x]|_{x=0,L} &= 0. \end{aligned}$$

Переходя к проекциям на неподвижные оси, получаем уравнения движения в неподвижной системе координат

$$\begin{aligned} A\rho u_{tt} - A\varepsilon u_{xx} - A\left(\eta + \frac{4}{3}\xi\right)u_{xxt} &= X, \\ A\rho v_{tt} - A\mathcal{G}v_{xx} - A\xi\Omega_t w_{xx} + A\mathcal{G}\varphi_x + A\xi\Omega_t\psi_x + A\xi\varphi_{xt} - A\xi v_{xxt} &= Y, \\ A\rho w_{tt} - A\mathcal{G}w_{xx} + A\xi\Omega_t v_{xx} + A\mathcal{G}\psi_x - A\xi\Omega_t\varphi_x + A\xi\psi_{xt} - A\xi w_{xxt} &= Z, \\ I\rho\varphi_{tt} - I\varepsilon\varphi_{xx} - I\left(\eta + \frac{4}{3}\xi\right)\Omega_t\psi_{xx} + (A\mathcal{G} - I\rho\Omega_t^2)\varphi + (A\xi\Omega_t + I\rho\Omega_{tt})\psi + \\ + A\xi\varphi_t - A\mathcal{G}v_x - A\xi\Omega_t w_x + 2I\rho\Omega_t\psi_t - A\xi v_{xt} - I\left(\eta + \frac{4}{3}\xi\right)\varphi_{xxt} &= 0, \quad (3.4) \\ I\rho\psi_{tt} - I\varepsilon\psi_{xx} + I\left(\eta + \frac{4}{3}\xi\right)\Omega_t\varphi_{xx} + (A\mathcal{G} - I\rho\Omega_t^2)\psi - (A\xi\Omega_t + I\rho\Omega_{tt})\varphi + \\ + A\xi\psi_t - A\mathcal{G}w_x + A\xi\Omega_t v_x - 2I\rho\Omega_t\varphi_t - A\xi w_{xt} - I\left(\eta + \frac{4}{3}\xi\right)\psi_{xxt} &= 0. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем разделе, опустим уравнение продольных колебаний, а уравнения изгибных колебаний запишем в операторной форме:

$$\mathcal{A}_0\mathbf{u} + \mathcal{A}_1\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u} + \mathcal{A}_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{u} = (v \ w \ \varphi \ \psi)^T, \quad \mathbf{f} = (Y \ Z \ 0 \ 0)^T, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0 &= \begin{pmatrix} -G & -Gr\omega & & 0 \\ Gr\omega & -G & & \\ & 0 & -B & -Bk\omega \\ & & Bk\omega & -B \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \\
&+ \begin{pmatrix} & G & Gr\omega \\ & -Gr\omega & G \\ -G & -Gr\omega & \\ Gr\omega & -G & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 0 & G - \mathcal{M}\omega^2 & Gr\omega + \mathcal{M}\epsilon \\ 0 & -Gr\omega - \mathcal{M}\epsilon & G - \mathcal{M}\omega^2 \end{pmatrix}, \\
\mathcal{A}_1 &= \begin{pmatrix} -Gr & 0 & 0 \\ 0 & -Gr & 0 \\ & 0 & -Bk & 0 \\ & & 0 & -Bk \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \begin{pmatrix} 0 & Gr & 0 \\ -Gr & 0 & \\ 0 & -Gr & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Gr & 2\mathcal{M}\omega \\ 0 & -2\mathcal{M}\omega & Gr \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & \\ 0 & \mathcal{M} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{M} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:  $G = A\mathcal{G}$ ,  $\omega = \Omega_t$ ,  $r = \frac{\xi}{g}$ ,  $B = \mathcal{E}I$ ,  $k = \frac{\eta}{\mathcal{E}} + \frac{4\xi}{3\mathcal{E}}$ .

Область определения операторов  $\mathcal{A}_i$  задается оператором краевых условий  $\mathcal{B}$ , который в общем случае упругого закрепления может быть записан таким образом

$$\mathcal{B}\mathbf{u} = \left( [\mathcal{B}(0)\mathbf{u}]|_{x=0}^T \quad [\mathcal{B}(L)\mathbf{u}]|_{x=L}^T \right)^T, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(0, L) &= \begin{pmatrix} G & Gr\omega & & 0 \\ -Gr\omega & G & & \\ & 0 & B & Bk\omega \\ & & -Bk\omega & B \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} Gr & 0 & 0 \\ 0 & Gr & 0 \\ 0 & Bk & 0 \\ 0 & 0 & Bk \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & -Gr & 0 \\ 0 & 0 & -Gr \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} + \begin{pmatrix} \mp\beta_{0,L} & 0 & -G & -Gr\omega \\ 0 & \mp\beta_{0,L} & Gr\omega & -G \\ 0 & 0 & \mp\gamma_{0,L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp\gamma_{0,L} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Для шарнирного закрепления, используемого в схеме эксперимента, краевые условия формулируются в следующем виде:

$$\left[ \begin{pmatrix} \mathcal{J} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{J} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u} \right] \Big|_{x=0, L} = 0, \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Консольному закреплению соответствуют такие условия:

$$\mathbf{u} \Big|_{x=0} = 0, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u} - \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{J} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u} \right] \Big|_{x=L} = 0. \quad (3.8)$$

Итак, уравнения движения (3.4) и краевые условия (3.6) или (3.7), (3.8), совместно с начальными условиями

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{v}_0 \quad (3.9)$$

являются формулировкой начально-краевой задачи в постановке теории Тимошенко.

#### 4. Спектр и собственные функции пучка операторов в технической постановке

На сегменте  $[0, L]$  введем гильбертово пространство  $\mathcal{L}_2^n$   $n$ -мерных комплекснозначных вектор-функций со скалярным произведением

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \int_0^L \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{w}} dx. \quad (4.1)$$

Здесь  $\bar{\mathbf{w}}$  — вектор, комплексно сопряженный к  $\mathbf{w}$ . Для модели в технической постановке  $n = 2$ , в постановке Тимошенко  $n = 4$ .

Уравнения движения стержня и краевые условия в постановке технической теории (2.11), (2.12) порождают пучок

$$\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{A}_0 + \lambda \mathcal{A}_1 + \lambda^2 \mathcal{A}_2 \quad (4.2)$$

с областью определения  $\mathcal{D}_\lambda$ , которая задается оператором  $\mathcal{B}_\lambda$

$$\mathcal{D}_\lambda = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathcal{L}_2^2 \wedge \mathcal{B}_\lambda \mathbf{u} = 0\}. \quad (4.3)$$

Структура оператора  $\mathcal{B}_\lambda$  подобна (2.12) с заменой  $\frac{\partial}{\partial t}$  на  $\lambda$ :

$$\mathcal{B}_{q\lambda} = \mathcal{H}B \frac{\partial^3}{\partial x^3} \pm \mathcal{J}\beta_{0,L}, \quad \mathcal{B}_{m\lambda} = \mathcal{H}B \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mp \mathcal{J}\gamma_{0,L} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda k & k\omega \\ -k\omega & 1 + \lambda k \end{pmatrix}.$$

Построим систему собственных вектор-функций пучка (4.2) (в силу несамосопряженности пучка она не будет ортогональной) и биортогональную к ней систему. Для этого в соответствии с [5, теорема 1], построим сопряженный пучок  $\mathcal{P}_\lambda^*$  в области  $\mathcal{D}_\lambda^*$ :

$$\mathcal{P}_\lambda^* = \mathcal{A}_0^* + \bar{\lambda} \mathcal{A}_1^* + \bar{\lambda}^2 \mathcal{A}_2^*, \quad \mathcal{D}^* = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathcal{L}_2^2 \wedge \mathcal{B}_\lambda^* \mathbf{u} = 0\}, \quad (4.4)$$

$$\mathcal{A}_0^* = \begin{pmatrix} B & -Bk\omega \\ Bk\omega & B \end{pmatrix} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \begin{pmatrix} \mathcal{M}\omega^2 & \mathcal{M}\epsilon \\ -\mathcal{M}\epsilon & \mathcal{M}\omega^2 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$$\mathcal{A}_1^* = \begin{pmatrix} Bk & 0 \\ 0 & Bk \end{pmatrix} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \begin{pmatrix} 0 & 2\mathcal{M}\omega \\ -2\mathcal{M}\omega & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$$\mathcal{B}_{q\lambda}^* = \mathcal{H}^* B \frac{\partial^3}{\partial x^3} \pm \mathcal{J}\beta_{0,L}, \quad \mathcal{B}_{m\lambda}^* = \mathcal{H}^* B \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mp \mathcal{J}\gamma_{0,L} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathcal{H}^* = \begin{pmatrix} 1 + \bar{\lambda} k & -k\omega \\ k\omega & 1 + \bar{\lambda} k \end{pmatrix}.$$

Отметим, что сопряженный пучок  $\mathcal{P}_\lambda^*$  отличается от  $\mathcal{P}_\lambda$  лишь знаком при  $\omega$ , что соответствует смене направления вращения стержня. Таким образом, два одинаковых вязкоупругих стержня, вращающиеся с одинаковой круговой частотой во встречных направлениях, порождают взаимно сопряженные пучки, а совокупность их собственных функций образует биортогональную систему.

Рассмотрим две взаимно сопряженные обобщенные задачи на собственные значения

$$\mathcal{P}_\lambda \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{k} \in \mathcal{D}; \quad \mathcal{P}_\lambda^* \mathbf{k}^* = 0, \quad \mathbf{k}^* \in \mathcal{D}^*. \quad (4.5)$$

Кососимметричная структура матричных коэффициентов операторов  $\mathcal{A}_i$  позволяет ввести преобразование  $\mathcal{S}$ , приводящее пучок  $\mathcal{P}_\lambda$  к диагональному виду

$$\mathcal{P}_\lambda^d = \mathcal{S}^{-1} \mathcal{P}_\lambda \mathcal{S}, \quad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (4.6)$$

В результате вычислений получим (при  $\epsilon = 0$ )

$$\mathcal{P}_\lambda^d = \begin{pmatrix} B(1 + k(\lambda + i\omega)) & 0 \\ 0 & B(1 + k(\lambda - i\omega)) \end{pmatrix} \frac{d^4}{dx^4} - \begin{pmatrix} \mathcal{M}(\lambda + i\omega)^2 & 0 \\ 0 & \mathcal{M}(\lambda - i\omega)^2 \end{pmatrix} \frac{d^2}{dx^2} + \begin{pmatrix} m\lambda^2 & 0 \\ 0 & m\lambda^2 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

При этом область определения пучка  $\mathcal{L}_\lambda^d$  задается оператором  $\mathcal{B}_\lambda^d = \mathcal{S}^{-1} \mathcal{B}_\lambda \mathcal{S}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{q\lambda}^d(0, L) &= B \begin{pmatrix} k(\lambda + i\omega) + 1 & 0 \\ 0 & k(\lambda - i\omega) + 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \pm \beta_{0,L} \mathcal{J}, \\ \mathcal{B}_{m\lambda}^d(0, L) &= B \begin{pmatrix} k(\lambda + i\omega) + 1 & 0 \\ 0 & k(\lambda - i\omega) + 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mp \gamma_{0,L} \mathcal{J}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Поскольку спектры пучков  $\mathcal{L}_\lambda$  и  $\mathcal{L}_\lambda^d$  совпадают, а их собственные функции ( $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{y}$  соответственно) связаны соотношением  $\mathbf{k} = \mathcal{S}\mathbf{y}$ , преобразование  $\mathcal{S}$  позволяет вместо задач (4.5) для двумерных вектор-функций находить решения двух несвязанных скалярных задач, первую из которых сформулируем относительно  $y_1$ :

$$\begin{aligned} B(1 + k(\lambda + i\omega)) \frac{d^4}{dx^4} y_1 - \mathcal{M}(\lambda + i\omega)^2 \frac{d^2}{dx^2} y_1 + m\lambda^2 y_1 &= 0, \\ B[k(\lambda + i\omega) + 1] \frac{d^2}{dx^2} y_1 \Big|_{x=0,L} \mp \gamma_{0,L} \frac{d}{dx} y_1 \Big|_{x=0,L} &= 0, \\ B[k(\lambda + i\omega) + 1] \frac{d^3}{dx^3} y_1 \Big|_{x=0,L} \pm \beta_{0,L} y_1 \Big|_{x=0,L} &= 0; \end{aligned} \quad (4.9)$$

а вторую — относительно  $y_2$ :

$$\begin{aligned} B(1 + k(\lambda - i\omega)) \frac{d^4}{dx^4} y_2 - \mathcal{M}(\lambda - i\omega)^2 \frac{d^2}{dx^2} y_2 + m\lambda^2 y_2 &= 0, \\ B[k(\lambda - i\omega) + 1] \frac{d^2}{dx^2} y_2 \Big|_{x=0,L} \mp \gamma_{0,L} \frac{d}{dx} y_2 \Big|_{x=0,L} &= 0, \\ B[k(\lambda - i\omega) + 1] \frac{d^3}{dx^3} y_2 \Big|_{x=0,L} \pm \beta_{0,L} y_2 \Big|_{x=0,L} &= 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Соответствующие задачи для сопряженного пучка получаются из выражений (4.9)—(4.10) заменой  $\omega$  на  $-\omega$ .

Остановимся подробнее на решении дифференциального уравнения (4.9), представив его следующим образом:

$$y_1 = C_1 e^{\zeta_1 x} + C_2 e^{\zeta_2 x} + C_3 e^{\zeta_3 x} + C_4 e^{\zeta_4 x}. \quad (4.11)$$

Здесь  $\zeta_i$  — корни характеристического уравнения

$$B(1 + k(\lambda - i\omega)) \zeta^4 - \mathcal{M}(\lambda - i\omega)^2 \zeta^2 + m\lambda^2 = 0, \quad (4.12)$$

которые легко выписать в явном виде

$$\zeta_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{\mathcal{M}(\lambda + i\omega)^2 \pm \sqrt{\mathcal{M}^2(\lambda + i\omega)^4 - 4Bm\lambda^2(k(\lambda + i\omega) + 1)}}{2B(k(\lambda + i\omega) + 1)}}. \quad (4.13)$$

В случаях кратных корней  $\zeta_1 = \zeta_2$  и  $\zeta_3 = \zeta_4$ , возникающих при условии

$$\mathcal{M}^2(\lambda + i\omega)^4 = 4Bm\lambda^2(k(\lambda + i\omega) + 1)$$

в выражение (4.11) входят присоединенные решения  $x e^{\zeta_1 x}$  и  $x e^{\zeta_3 x}$ .

Собственные значения задачи (4.9) вычисляются как корни (вообще говоря, комплексные) трансцендентного уравнения, которое представляет собой определитель системы однородных линейных уравнений, получаемых в результате подстановки общего решения (4.11) в краевые условия (4.9):

$$\begin{vmatrix} \sigma \zeta_1^2 - \gamma_0 \zeta_1 & \dots & \sigma \zeta_4^2 - \gamma_0 \zeta_4 \\ \sigma \zeta_1^2 e^{\zeta_1 L} + \gamma_L \zeta_1 e^{\zeta_1 L} & \dots & \sigma \zeta_4^2 e^{\zeta_4 L} + \gamma_L \zeta_4 e^{\zeta_4 L} \\ \sigma \zeta_1^3 + \beta_0 & \dots & \sigma \zeta_4^3 + \beta_0 \\ \sigma \zeta_1^3 e^{\zeta_1 L} - \beta_L e^{\zeta_1 L} & \dots & \sigma \zeta_4^3 e^{\zeta_4 L} - \beta_L e^{\zeta_4 L} \end{vmatrix} = 0, \quad \sigma = B(k(\lambda + i\omega) + 1). \quad (4.14)$$

В случае шарнирного закрепления уравнение (4.14) имеет вид

$$\begin{aligned} \left( \exp \left[ L \sqrt{\frac{2\mathcal{M}(\lambda + i\omega)^2 + \vartheta}{B(\lambda + i\omega) + 1}} \right] - 1 \right) \times \\ \times \left( \exp \left[ L \sqrt{\frac{2\mathcal{M}(\lambda + i\omega)^2 - \vartheta}{B(\lambda + i\omega) + 1}} \right] - 1 \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\vartheta = 2\sqrt{\mathcal{M}^2(\lambda + i\omega)^4 - 4Bm\lambda^2(1 + k(\lambda + i\omega))},$$

и не составляет труда найти его корни. Действительно, левая часть (4.15) обращается в нуль, если для  $n = 1, 2, \dots$

$$\sqrt{\frac{2\mathcal{M}(\lambda + i\omega)^2 \pm \vartheta}{B(k(\lambda + i\omega) + 1)}} = \frac{2n\pi i}{L}, \quad (4.16)$$

то есть значения  $\lambda$  должны принадлежать одной из двух последовательностей

$$\lambda_n^{1,2} = -\frac{n\pi}{2L^2(mL^2 + \mathcal{M}n^2\pi^2)} \left( Bkn^3\pi^3 + 2iL^2\mathcal{M}\omega n\pi \pm \sqrt{4m\mathcal{M}\omega^2L^6 - 4BL^2((ik\omega + 1)mL^2 + \mathcal{M}n^2\pi^2)n^2\pi^2 + B^2k^2n^6\pi^6} \right). \quad (4.17)$$

Особая точка  $-i\omega - 1/k$  подкоренного выражения (4.16) определяет на комплексной плоскости точку сгущения для этих последовательностей.

В случае консольного закрепления получить аналитические выражения не удастся и собственные значения приходится определять численно как корни следующего трансцендентного уравнения

$$(e^{2\xi_1 L} + e^{2\xi_2 L})\xi_1 \xi_2 (\xi_1 + \xi_2)^2 - (1 + e^{2(\xi_1 + \xi_2)L})\xi_1 \xi_2 (\xi_1 - \xi_2)^2 - 4e^{(\xi_1 + \xi_2)L}(\xi_1^4 + \xi_2^4) = 0.$$

Как уже отмечалось, вторая задача (4.10) отличается лишь знаком при  $\omega$ . Повторяя приведенные выше построения, найдем корни соответствующего характеристического уравнения

$$\zeta_{5,6,7,8} = \pm \sqrt{\frac{\mathcal{M}(\lambda - i\omega)^2 \pm \sqrt{\mathcal{M}^2(\lambda - i\omega)^4 - 4Bm\lambda^2(k(\lambda - i\omega) + 1)}}{2B(k(\lambda - i\omega) + 1)}}. \quad (4.18)$$

Собственные значения вычисляются как корни трансцендентного уравнения при подстановке в (4.14) значений  $\zeta_{5,6,7,8}$  вместо  $\zeta_{1,2,3,4}$ . В случае шарнирного закрепления имеем:

$$\lambda_n^{3,4} = -\frac{n\pi}{2L^2(mL^2 + \mathcal{M}n^2\pi^2)} \left( Bkn^3\pi^3 - 2iL^2\mathcal{M}\omega n\pi \pm \sqrt{4m\mathcal{M}\omega^2L^6 - 4BL^2((1 - ik\omega)mL^2 + \mathcal{M}n^2\pi^2)n^2\pi^2 + B^2k^2n^6\pi^6} \right). \quad (4.19)$$

Последовательностей  $\lambda_n^{3,4}$  имеют точку сгущения  $i\omega - 1/k$ .

Таким образом, собственные значения первой задачи Штурма-Лиувилля (4.5) вычисляются как два семейства корней трансцендентных уравнений (4.14), которые, в случае шарнирного опирания, распадаются на 4 последовательности  $\lambda_n^{1,2}, \lambda_n^{3,4}$ .

Запишем выражение для собственных функций  $y_1$  задачи (4.9):

$$y_{1n} = e^{\zeta_1 x} - \begin{pmatrix} e^{\zeta_2 x} & e^{\zeta_3 x} & e^{\zeta_4 x} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \sigma\zeta_2^2 - \gamma_0\zeta_2 & \sigma\zeta_3^2 - \gamma_0\zeta_3 & \sigma\zeta_4^2 + \gamma_0\zeta_4 \\ \sigma\zeta_2^2 e^{\zeta_2 L} + \gamma_L\zeta_2 e^{\zeta_2 L} & \sigma\zeta_3^2 e^{\zeta_3 L} + \gamma_L\zeta_3 e^{\zeta_3 L} & \sigma\zeta_4^2 e^{\zeta_4 L} + \gamma_L\zeta_4 e^{\zeta_4 L} \\ \sigma\zeta_2^3 + \beta_0 & \sigma\zeta_3^3 + \beta_0 & \sigma\zeta_4^3 + \beta_0 \end{pmatrix}^{-1} \times \\ \times \begin{pmatrix} \sigma\zeta_1^2 - \gamma_0\zeta_1 \\ \sigma\zeta_1^2 e^{\zeta_1 L} + \gamma_L\zeta_1 e^{\zeta_1 L} \\ \sigma\zeta_1^3 + \beta_0 \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

где  $\zeta_1, \dots, \zeta_4$  вычисляются для  $\lambda = \lambda_n^{1,2}$ . Собственные функции  $y_{2n}$  задачи (4.10) имеют аналогичное представление, нужно лишь заменить  $\zeta_{1,2,3,4}$  на  $\zeta_{5,6,7,8}$ . Учитывая, что собственные функции пучка  $\mathcal{P}_\lambda$  связаны с найденными  $y_{1n}, y_{2n}$  соотношениями

$$\mathbf{k}_{1n} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} y_{1n} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ iy_{1n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_{2n} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} 0 \\ y_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iy_{2n} \\ y_{2n} \end{pmatrix},$$

получим полную систему собственных функций пучка (4.2).

В случае шарнирного опирания

$$y_{1n} = y_{2n} = \sin \frac{n\pi x}{L}, \\ \mathbf{k}_{1n} = \mathbf{k}_{2n} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \mathbf{k}_{3n} = \mathbf{k}_{4n} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Так как сопряженная задача (вторая задача (4.5)) отличается от исходной только знаком при  $\omega$ , то собственные функции сопряженно-го пучка вычисляются по формулам (4.13), (4.18), (4.20) с заменой в них  $\omega$  на  $-\omega$ .

Между нормированными собственными функциями исходного  $(\mathbf{e}_n, \mathbf{E}_n)$  и сопряженного операторов  $(\mathbf{e}_n^*, \mathbf{E}_n^*)$ :

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{k}_n / \sqrt{N_n}, \quad \mathbf{e}_n^* = \mathbf{k}_n^* / \sqrt{N_n}; \quad \mathbf{E}_n = \mathbf{k}_n / \sqrt{\mathcal{N}_n}, \quad \mathbf{E}_n^* = \mathbf{k}_n^* / \sqrt{\mathcal{N}_n}, \quad (4.21)$$

где  $N_n$  и  $\mathcal{N}_n$  - нормирующие множители:

$$N_n = \langle \mathcal{A}_1 \mathbf{k}_n, \mathbf{k}_n^* \rangle + 2\lambda_n \langle \mathcal{A}_2 \mathbf{k}_n, \mathbf{k}_n^* \rangle, \quad \mathcal{N}_n = \langle \mathcal{A}_0 \mathbf{k}_n, \mathbf{k}_n^* \rangle - \lambda_n^2 \langle \mathcal{A}_2 \mathbf{k}_n, \mathbf{k}_n^* \rangle,$$

устанавливаются соотношения биортогональности, которые для квадратичных операторных пучков могут быть записаны в виде [5]

$$\langle \mathcal{A}_1 \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_j^* \rangle + (\lambda_n + \lambda_j) \langle \mathcal{A}_2 \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_j^* \rangle = \delta_{nj}, \quad (4.22)$$

$$\langle \mathcal{A}_0 \mathbf{E}_n, \mathbf{E}_j^* \rangle - \lambda_n \lambda_j \langle \mathcal{A}_2 \mathbf{E}_n, \mathbf{E}_j^* \rangle = \delta_{nj}. \quad (4.23)$$

В развернутой записи для операторов технической теории соотношения (4.22) формулируются следующим образом  $(\mathbf{k}_i = (k_{1i} \ k_{2i})^T, \mathbf{e}_i =$

$$\begin{aligned}
&= (e_{1i} \ e_{2i})^T: \\
N_n &= \int_0^L \left[ \left( Bk \frac{d^4}{dx^4} k_{1n} - 2\mathcal{M}\omega \frac{d^2}{dx^2} k_{2n} + 2\lambda_n (mk_{1n} - \mathcal{M} \frac{d^2}{dx^2} k_{1n}) \right) \bar{k}_{1n}^* + \right. \\
&\quad \left. + \left( Bk \frac{d^4}{dx^4} k_{2n} + 2\mathcal{M}\omega \frac{d^2}{dx^2} k_{1n} + 2\lambda_n (mk_{2n} - \mathcal{M} \frac{d^2}{dx^2} k_{2n}) \right) \bar{k}_{2n}^* \right] dx; \\
&\int_0^L \left[ \left( Bk \frac{d^4}{dx^4} e_{1n} - 2\mathcal{M}\omega \frac{d^2}{dx^2} e_{2n} + (\lambda_n + \lambda_j) (me_{1n} - \mathcal{M} \frac{d^2}{dx^2} e_{1n}) \right) \bar{e}_{1j}^* + \right. \\
&\quad \left. + \left( Bk \frac{d^4}{dx^4} e_{2n} + 2\mathcal{M}\omega \frac{d^2}{dx^2} e_{1n} + (\lambda_n + \lambda_j) (me_{2n} - \mathcal{M} \frac{d^2}{dx^2} e_{2n}) \right) \bar{e}_{2j}^* \right] dx = \delta_{nj}.
\end{aligned}$$

Аналогичные соотношения выписываются для (4.23)

Отметим без доказательства некоторые важные свойства построенной биортогональной системы. Поскольку дифференциальные операторы, порождающие пучок  $\mathcal{P}_\lambda$  (4.2), регулярны на сегменте  $[0, L]$ , а краевые условия (2.12) принадлежат регулярному типу в смысле [14], то биортогональная система функций  $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i^*$  (как и  $\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_i^*$ ) является полной в  $\mathcal{L}_2^2$  и образует биортогональный базис в смысле Рисса [15]. Все это позволяет использовать систему  $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i^*$  (или  $\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_i^*$ ) в качестве биортогонального базиса в  $\mathcal{L}_2^2$  и осуществлять по ней разложения произвольных вектор-функций, интегрируемых с квадратом.

## 5. Спектр и собственные функции пучка операторов в постановке теории Тимошенко

Уравнения движения и краевые условия (3.6), сформулированные в постановке теории Тимошенко, порождают квадратичный пучок операторов

$$\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{A}_0 + \lambda \mathcal{A}_1 + \lambda^2 \mathcal{A}_2, \quad \mathcal{D}_\lambda = \{\mathbf{u} | \mathbf{u} \in \mathcal{L}_2^4 \wedge \mathcal{B}_\lambda \mathbf{u} = 0\}. \quad (5.1)$$

Здесь  $\mathcal{B}_\lambda \mathbf{u} = \left( [\mathcal{B}_\lambda(0)\mathbf{u}]|_{x=0} \quad [\mathcal{B}_\lambda(L)\mathbf{u}]|_{x=L} \right)^T$ ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_\lambda(0, L) &= \begin{pmatrix} G(1 + \lambda r) & Gr\omega & & \mathcal{O} \\ -Gr\omega & G(1 + \lambda r) & & \\ & \mathcal{O} & B(1 + \lambda k) & Bk\omega \\ & & -Bk\omega & B(1 + \lambda k) \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \\
&\quad + \begin{pmatrix} \mp\beta_{0,L} & 0 & -G(1 + \lambda r) & -Gr\omega \\ 0 & \mp\beta_{0,L} & Gr\omega & -G(1 + \lambda r) \\ & \mathcal{O} & \mp\gamma_{0,L} & 0 \\ & & 0 & \mp\gamma_{0,L} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$



В соответствии с [5, теорема 1] построим сопряженный пучок

$$\mathcal{P}_\lambda^* = \mathcal{A}_0^* + \bar{\lambda} \mathcal{A}_1^* + \bar{\lambda}^2 \mathcal{A}_2^*, \quad \mathcal{D}_\lambda^* = \{\mathbf{u} | \mathbf{u} \in \mathcal{L}_2^4 \wedge \mathcal{B}_\lambda^* \mathbf{u} = 0\},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0^* &= \begin{pmatrix} -G & Gr\omega & & 0 \\ -Gr\omega & -G & & \\ & 0 & -B & Bk\omega \\ & & -Bk\omega & -B \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \\ &+ \begin{pmatrix} & 0 & G & -Gr\omega \\ & & Gr\omega & G \\ -G & Gr\omega & & \\ -Gr\omega & -G & & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & & 0 & \\ 0 & G - \mathcal{M}\omega^2 & -Gr\omega - \mathcal{M}\epsilon & \\ 0 & Gr\omega + \mathcal{M}\epsilon & G - \mathcal{M}\omega^2 & \end{pmatrix}, \\ \mathcal{A}_1^* &= \begin{pmatrix} -Gr & 0 & & 0 \\ 0 & -Gr & & \\ & 0 & -Bk & 0 \\ & & 0 & -Bk \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \begin{pmatrix} & 0 & Gr & 0 \\ & & 0 & Gr \\ -Gr & 0 & & \\ 0 & -Gr & & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & & 0 & \\ 0 & Gr & -2\mathcal{M}\omega & \\ 0 & 2\mathcal{M}\omega & Gr & \end{pmatrix}, \\ \mathcal{B}_\lambda(0, L)^* &= \begin{pmatrix} G(1 + \lambda r) & -Gr\omega & & 0 \\ Gr\omega & G(1 + \lambda r) & & \\ & 0 & B(1 + \lambda k) & -Bk\omega \\ & & Bk\omega & B(1 + \lambda k) \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \\ &+ \begin{pmatrix} \mp\beta_{0,L} & 0 & -G(1 + \lambda r) & Gr\omega \\ 0 & \mp\beta_{0,L} & -Gr\omega & -G(1 + \lambda r) \\ & & \mp\gamma_{0,L} & 0 \\ & 0 & 0 & \mp\gamma_{0,L} \end{pmatrix}. \quad (5.2) \end{aligned}$$

Отметим, что, как и в рамках технической теории, сопряженный оператор отличается от исходного лишь знаком при  $\omega$ .

Введем преобразование  $\mathcal{S}$ , приводящее пучок к квазидиагональному виду

$$\mathcal{P}_\lambda^d = \mathbf{S}^{-1} \mathcal{P}_\lambda^* \mathbf{S}, \quad \mathcal{B}_\lambda^d = \mathbf{S}^{-1} \mathcal{B}_\lambda^* \mathbf{S}, \quad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

В результате преобразования получим две несвязанных задачи, пер-

вая из которых при  $\epsilon = 0$  имеет вид:

$$\begin{aligned} & -G(r(\lambda + i\omega) + 1)\left(\frac{d}{dx}y_3 + \frac{d^2}{dx^2}y_1\right) + m\lambda^2y_1 = 0, \\ & G(r(\lambda + i\omega) + 1)\left(y_3 + \frac{d}{dx}y_1\right) - B(k(\lambda + i\omega) + 1)\frac{d^2}{dx^2}y_3 + \mathcal{M}(\lambda + i\omega)^2y_3 = 0, \\ & \left[G(r(\lambda + i\omega) + 1)\left(\frac{\partial}{\partial x}y_1 - y_3\right) \mp \beta_{0,L}y_1\right] \Big|_{x=0,L} = 0, \\ & \left[B(k(\lambda + i\omega) + 1)\frac{\partial}{\partial x}y_3 \mp \gamma_{0,L}y_3\right] \Big|_{x=0,L} = 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

а вторая отличается лишь знаком при  $\omega$ .

Решение дифференциального уравнения (5.4) представим следующим образом:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^4 C_j \begin{pmatrix} G\zeta_j(r(\lambda + i\omega) + 1) \\ m\lambda^2 - G\zeta_j^2(r(\lambda + i\omega)) \end{pmatrix} e^{\zeta_j x}, \quad (5.5)$$

где  $\zeta_j$  — корни характеристического уравнения

$$\begin{aligned} & G(r(\lambda + i\omega) + 1)^2\zeta^2 + (m\lambda^2 - G\zeta^2(r(\lambda + i\omega) + 1)) \times \\ & \times (\mathcal{M}(\lambda + i\omega)^2 + G(r(\lambda + i\omega) + 1) - B\zeta^2(k(\lambda + i\omega) + 1)) = 0, \end{aligned}$$

которые могут быть выписаны явно:

$$\begin{aligned} \zeta_{1,2,3,4} = & \pm \left[ BG(k(\lambda + i\omega) + 1)(r(\lambda + i\omega) + 1) \right]^{-1/2} \left[ h \pm \left( h^2 - 4BGm\lambda^2(k(\lambda + \right. \right. \\ & \left. \left. + i\omega) + 1)(r(\lambda + i\omega) + 1)(\mathcal{M}(\lambda + i\omega)^2 + G(r(\lambda + i\omega) + 1)) \right)^{1/2} \right]^{1/2}, \\ & h = Bm\lambda^2(k(\lambda + i\omega) + 1) + G\mathcal{M}(\lambda + i\omega)^2(r(\lambda + i\omega) + 1). \end{aligned}$$

В результате подстановки решения (5.5) в краевые условия (5.4) приходим к трансцендентному уравнению

$$\begin{vmatrix} 2\zeta_1^2\tau - m\lambda^2 - \beta_0\zeta_1 & \dots & 2\zeta_4^2\tau - m\lambda^2 - \beta_0\zeta_4 \\ (\zeta_1^2\tau - m\lambda^2 + \beta_L\zeta_1)e^{\zeta_1 L} & \dots & (\zeta_4^2\tau - m\lambda^2 + \beta_L\zeta_4)e^{\zeta_4 L} \\ \sigma\zeta_1 - \gamma_0 & \dots & \sigma\zeta_4 - \gamma_0 \\ (\sigma\zeta_1 + \gamma_L)e^{\zeta_1 L} & \dots & (\sigma\zeta_4 + \gamma_L)e^{\zeta_4 L} \end{vmatrix} = 0, \quad \tau = G(r(\lambda + i\omega) + 1), \quad (5.6)$$

нулями которого являются собственные значения  $\lambda_n^1$ . Соответствующие им собственные вектор-функции могут быть определены по фор-

МУЛЕ:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{3n} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \zeta_1 \tau \\ m\lambda^2 - \zeta_1^2 \tau \end{pmatrix} e^{\zeta_1 x} - \\
 &- \begin{pmatrix} \zeta_2 \tau e^{\zeta_2 x} & \zeta_3 \tau e^{\zeta_3 x} & \zeta_4 \tau e^{\zeta_4 x} \\ (m\lambda^2 - \zeta_2 \tau) e^{\zeta_2 x} & (m\lambda^2 - \zeta_3 \tau) e^{\zeta_3 x} & (m\lambda^2 - \zeta_4 \tau) e^{\zeta_4 x} \end{pmatrix} \times \\
 &\times \begin{pmatrix} 2\zeta_2^2 \tau - m\lambda^2 - \beta_0 \zeta_2 & \dots & 2\zeta_4^2 \tau - m\lambda^2 - \beta_0 \zeta_4 \\ (2\zeta_2^2 \tau - m\lambda^2 + \beta_L \zeta_2) e^{\zeta_2 L} & \dots & (2\zeta_4^2 \tau - m\lambda^2 + \beta_L \zeta_4) e^{\zeta_4 L} \\ \sigma \zeta_2 - \gamma_0 & \dots & \sigma \zeta_4 - \gamma_0 \end{pmatrix}^{-1} \times \\
 &\times \begin{pmatrix} 2\zeta_1^2 \tau - m\lambda^2 - \beta_0 \zeta_1 \\ (2\zeta_1^2 \tau - m\lambda^2 + \beta_L \zeta_1) e^{\zeta_1 L} \\ \sigma \zeta_1 - \gamma_0 \end{pmatrix}, \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

где  $\zeta_1, \dots, \zeta_4$  вычисляются для  $\lambda = \lambda_n^1$ . Собственные значения  $\lambda_n^2$  и собственные функции  $(y_{2n} \ y_{4n})^T$  для второй задачи находятся аналогично. Располагая выражениями для  $y_{1n}, \dots, y_{4n}$ , построим собственные функции пучка (5.1)

$$\mathbf{k}_n^1 = \mathfrak{S} \begin{pmatrix} y_{1n} \\ 0 \\ y_{3n} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ iy_{1n} \\ y_{3n} \\ iy_{3n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_n^2 = \mathfrak{S} \begin{pmatrix} 0 \\ y_{2n} \\ 0 \\ y_{4n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iy_{2n} \\ y_{2n} \\ y_{4n} \\ iy_{4n} \end{pmatrix}.$$

Нормирующие множители вычисляются следующим образом ( $\mathbf{k}_n^{1,2} = (k_{1n} \ k_{2n} \ k_{3n} \ k_{4n})$ ):

$$\begin{aligned}
 N_n &= \int_0^L \left[ \left( (2\lambda_n m - Gr \frac{\partial^2}{\partial x^2}) k_{1n} + Gr \frac{\partial}{\partial x} k_{3n} \right) \bar{k}_{1n}^* + \right. \\
 &\quad + \left( (2\lambda_n m - Gr \frac{\partial^2}{\partial x^2}) k_{2n} + Gr \frac{\partial}{\partial x} k_{4n} \right) \bar{k}_{2n}^* + \\
 &\quad + \left( (2\lambda_n \mathcal{M} + Gr - Bk \frac{\partial^2}{\partial x^2}) k_{3n} - Gr \frac{\partial}{\partial x} k_{1n} + 2\mathcal{M}\omega k_{4n} \right) \bar{k}_{3n}^* + \\
 &\quad \left. + \left( (2\lambda_n \mathcal{M} + Gr - Bk \frac{\partial^2}{\partial x^2}) k_{4n} - Gr \frac{\partial}{\partial x} k_{2n} - 2\mathcal{M}\omega k_{3n} \right) \bar{k}_{4n}^* \right] dx.
 \end{aligned}$$

Нормированная биортогональная система  $\mathbf{e}_n^{1,2} = (e_{1n} \ e_{2n} \ e_{3n} \ e_{4n})$  удовлетворяет соотношениям биортогональности (4.22), (4.23), первое

из которых в подробной записи выглядит так:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left[ \left( (\lambda_n + \lambda_j)m - Gr \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) e_{1n} + Gr \frac{\partial}{\partial x} e_{3n} \right] \bar{e}_{1j}^* + \\ & \quad + \left( (\lambda_n + \lambda_j)m - Gr \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) e_{2n} + Gr \frac{\partial}{\partial x} e_{4n} \right] \bar{e}_{2j}^* + \\ & \quad + \left( (\lambda_n + \lambda_j)\mathcal{M} + Gr - Bk \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) e_{3n} - Gr \frac{\partial}{\partial x} e_{1n} + 2\mathcal{M}\omega e_{4n} \right] \bar{e}_{3j}^* + \\ & \quad + \left( (\lambda_n + \lambda_j)\mathcal{M} + Gr - Bk \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) e_{4n} - Gr \frac{\partial}{\partial x} e_{2n} - 2\mathcal{M}\omega e_{3n} \right] \bar{e}_{4j}^* \Big] dx = \delta_{nj}. \end{aligned}$$

## 6. Динамическая реакция вращающегося стержня

Осуществим построение спектральных представлений для перемещений вращающегося стержня с помощью несимметричных интегральных преобразований [5]. Далее, в целях упрощения изложения, мы полагаем, что спектр  $\Lambda$  пучка  $\mathcal{P}_\lambda$  содержит лишь простые собственные значения<sup>5</sup>. В этом случае прямое интегральное преобразование и формула обращения записываются следующим образом:

$$\phi(\lambda) = \mathcal{F}^* \mathbf{u}(x) = \begin{cases} -\lambda^{-1} \int_0^L \overline{\mathcal{A}_0^* \mathbf{e}_\lambda^*}, \mathbf{u}^T dx, & \lambda \in \Lambda, \\ 0, & \lambda \notin \Lambda \end{cases}, \quad (6.1)$$

$$\mathbf{u}(x) = \mathcal{F} \phi(\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{e}_\lambda \phi(\lambda), \quad (6.2)$$

где  $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i^*$  — элементы построенных выше биортонормированных базисов.

Действуя на начально-краевую задачу (2.12) или (3.6) прямым интегральным преобразованием (6.1), приходим к задаче Коши в пространстве изображений [5]:

$$\frac{d}{dt} \phi - \lambda \phi = \mathcal{F}^* \mathbf{F}, \quad (6.3)$$

где  $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix}^T$  для технической постановки,  $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} X & Y & Z & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$  для постановки Тимошенко, со следующими начальными условиями:

$$\phi|_{t=0} = \mathcal{F}^* [\mathcal{A}_1 \mathbf{u}_0 + \mathcal{A}_2 \mathbf{v}_0 + \lambda \mathcal{A}_2 \mathbf{v}_0]. \quad (6.4)$$

<sup>5</sup>В случае кратных корней частотных уравнений (4.14), (5.6) соответствующее собственное значение имеет алгебраическую кратность больше единицы. Процедура построения возникающих при этом цепочек собственных и присоединенных векторов изложена в [5].

Применяя к решению задачи Коши (6.3), (6.4) формулу обращения (6.2), получаем решение исходной начально-краевой задачи

$$\mathbf{y} = \mathcal{F} \left[ \exp(\bar{\lambda}t) \left( \mathcal{F}^* \mathcal{A}_1^* \mathbf{u}_0 + \bar{\lambda} \mathcal{F}^* \mathcal{A}_2^* \mathbf{u}_0 + \mathcal{F}^* \mathcal{A}_2^* \mathbf{v}_0 \right) + \int_0^t \exp[\bar{\lambda}(t-\tau)] \mathcal{F}^* \mathbf{F}(\tau) d\tau \right]. \quad (6.5)$$

Отметим, что при вычислении частичных сумм (6.5) важно соблюдать порядок суммирования в соответствии с расположением точек сгущения собственных значений на комплексной плоскости [5]. Полнота и базисность (по Риссу) биортогональной системы  $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i^*$  обеспечивает среднеквадратичную сходимость разложений. Суммирование методом средних арифметических (методом Фейера) позволяет существенным образом улучшить сходимость получаемых рядов.

## 7. Динамическая реакция стержня из стареющего материала

Представления для перемещений (6.5) справедливы только для инвариантного во времени материала. Если материал стержня стареет, т. е. его реологические характеристики изменяются во времени, то матричные коэффициенты операторов  $A_i$  оказываются зависимыми от времени и разделение переменных посредством линеаризации пучка становится невозможным [5]. Однако для некоторых специальных типов краевых условий удастся построить замкнутые решения, если применять интегральные преобразования не к исходной начально-краевой задаче, а к задаче, которая предварительно "диагонализируется"  $\mathcal{S}$ -преобразованием. Так, применяя преобразование  $\mathcal{S}^{-1}L\mathcal{S}$  к начально-краевой задаче (2.11), (2.13), получим два несвязанных уравнения относительно новых переменных  $\tilde{v}, \tilde{w}$  ( $(\tilde{v} \ \tilde{w})^T = \mathcal{S}^{-1}(v \ w)^T$ ):

$$\begin{aligned} B(k(\frac{\partial}{\partial t} + i\omega) + 1) \frac{\partial^4}{\partial x^4} \tilde{v} - \mathcal{M}(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + i\omega \frac{\partial}{\partial t} - \omega^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{v} + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{v} &= \frac{1}{2}(Y - iZ), \\ B(k(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega) + 1) \frac{\partial^4}{\partial x^4} \tilde{w} - \mathcal{M}(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - i\omega \frac{\partial}{\partial t} - \omega^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{w} + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{w} &= \frac{1}{2}(Z - iY) \end{aligned} \quad (7.1)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} \tilde{v}|_{t=0} &= \frac{1}{2}(v - iw)|_{t=0}, & \tilde{w}|_{t=0} &= \frac{1}{2}(iv - w)|_{t=0}, \\ \frac{d}{dt} \tilde{v}|_{t=0} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(v - iw)|_{t=0}, & \frac{d}{dt} \tilde{w}|_{t=0} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(iv - w)|_{t=0}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Отметим, что здесь  $B$  и  $k$  — функции времени.

Для краевых условий, соответствующих шарнирному закреплению

$$\tilde{v}|_{x=0,L} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{v}|_{x=0,L} = 0, \quad \tilde{w}|_{x=0,L} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{w}|_{x=0,L} = 0, \quad (7.3)$$

интегральное преобразование, диагонализующее одновременно два пространственных оператора  $\frac{\partial^4}{\partial x^4}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ , представляет собой конечное синус-преобразование Фурье

$$\Phi(t)_n^+ = \frac{2}{L} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} u(x, t) dx, \quad \Phi(t)_n^- = \frac{2}{L} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} v(x, t) dx, \quad (7.4)$$

в результате действия которого получим задачу в изображениях:

$$\begin{aligned} B(k(\frac{\partial}{\partial t} + i\omega) + 1) \frac{n^4 \pi^4}{L^4} \Phi_n^+ - \mathcal{M}(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + i\omega \frac{\partial}{\partial t} - \omega^2) \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \Phi_n^+ + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi_n^+ &= \Phi_1, \\ B(k(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega) + 1) \frac{n^4 \pi^4}{L^4} \Phi_n^- - \mathcal{M}(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - i\omega \frac{\partial}{\partial t} - \omega^2) \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \Phi_n^- + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi_n^- &= \Phi_2. \end{aligned}$$

Здесь

$$\Phi_n^+ = \frac{1}{L} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} (Y - iZ) dx, \quad \Phi_n^- = \frac{1}{L} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} (Z - iY) dx. \quad (7.5)$$

Таким образом, в результате действия преобразования Фурье получается система обыкновенных уравнений с переменными коэффициентами.

Пусть жесткость стержня  $B$  не изменяется во времени, а коэффициент внутреннего трения  $k$  изменяется по линейному закону:  $k = k_0 + k_1 t$ . Тогда два линейно независимых решения однородного уравнения

$$B(k(\frac{\partial}{\partial t} + i\omega) + 1) \frac{n^4 \pi^4}{L^4} \Phi_{n0}^+ - \mathcal{M}(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + i\omega \frac{\partial}{\partial t} - \omega^2) \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \Phi_{n0}^+ + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi_{n0}^+ = 0$$

могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{n01}^+ &= e^{-\frac{b}{2}t^2 - at + \frac{d}{b}t} {}_1F_1\left(\frac{b^3 - cb^2 + adb - d^2}{2b^3}; \frac{1}{2}; \frac{(b(a + bt) - 2d)^2}{2b^3}\right), \\ \Phi_{n02}^+ &= e^{-\frac{b}{2}t^2 - at + \frac{d}{b}t} H_{-\frac{b^3 + cb^2 - adb + d^2}{b^3}}\left(\frac{b(a + bt) - 2d}{\sqrt{2b^3}}\right), \end{aligned}$$

где  ${}_1F_1(\cdot, \cdot, \cdot)$  — гипергеометрическая функция,  $H_\nu(\cdot)$  — функция Эрмита,

$$\begin{aligned} a &= \frac{Bk_0 n^2 \pi^2 / L^2 - \mathcal{M}i\omega}{mL^2 / (n^2 \pi^2) - M}, & b &= \frac{Bk_1 n^2 \pi^2 / L^2}{mL^2 / (n^2 \pi^2) - M}, \\ c &= \frac{(Bk_0 i\omega + B)n^2 \pi^2 / L^2 + \mathcal{M}\omega}{mL^2 / (n^2 \pi^2) - M}, & d &= \frac{Bk_1 i\omega n^2 \pi^2 / L^2}{mL^2 / (n^2 \pi^2) - M}. \end{aligned}$$

Решения второго однородного уравнения  $\phi_{n01}^-, \phi_{n02}^-$  представляются теми же зависимостями с заменой  $\omega$  на  $-\omega$ . Располагая  $\phi_{n01}^{+,-}, \phi_{n02}^{+,-}$ , не составляет труда построить решения  $\phi_n^+, \phi_n^-$  соответствующих неоднородных уравнений, удовлетворяющих изображениям начальных условий (7.2).

Решения начально-краевых задач (7.1) – (7.3) теперь могут быть представлены в форме разложения в ряд Фурье

$$\tilde{v} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \phi_{n1}, \quad \tilde{w} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \phi_{n2}. \quad (7.6)$$

Действуя теперь на (7.6) преобразованием  $\mathfrak{S}$ , получим представления для перемещений стержня:

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \mathfrak{S} \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \begin{pmatrix} \phi_{n1} + i\phi_{n2} \\ \phi_{n2} + i\phi_{n1} \end{pmatrix}. \quad (7.7)$$

Отметим, что используемые здесь интегральные преобразования позволяют полностью разделить переменные только для специальных классов краевых условий, например, для шарнирного опирания. Уже в случае консольного опирания полного отделения осуществить не удается и после действия интегральных преобразований получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений<sup>6</sup>.

## 8. Заключительные замечания

Предлагаемые в статье экспериментальные схемы определения реологических характеристик основаны на измерениях перемещений вращающегося стержня. Перемещения представляются в рамках теоретической модели в форме спектральных разложений (6.5), (7.7). Численные значения реологических параметров  $k$  и  $r$  могут быть вычислены из сопоставления экспериментальных и теоретических представлений.

## Литература

- [1] Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
- [2] Грин Д.Х., Рингвуд А.Э. Петрология верхней мантии. М.: Мир, 1968. 335 с.

---

<sup>6</sup>Здесь возникает ситуация, аналогичная проблеме определения перемещений жесткозащемленной пластины, когда полного разделения переменных не удается осуществить, и краевая задача сводится к бесконечной системе алгебраических уравнений.

- [3] Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
- [4] Сеницкий Ю.Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований. Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1985. 176 с.
- [5] Лычев С.А., Сеницкий Ю.Э. Несимметричные интегральные преобразования и их приложения к задачам вязкоупругости // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2002. Специальный выпуск.
- [6] Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
- [7] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
- [8] Сеницкий Ю.Э. Напряженное состояние вязкопластического цилиндра и сферы при динамическом нагружении // В сб.: Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев: Будівельник, 1989. Вып. 55.
- [9] Adamjan V., Pivovarchik V, Tretter C. On a class of non-selfadjoint quadratic matrix operator pencils in elasticity theory // Journal of Operator Theory. 2002. Vol. 47, №2, P. 325-341.
- [10] Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Том II. М.: Наука, 1978. 616 с.
- [11] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.
- [12] Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Физматлит, 2001. 262 с.
- [13] Тимошенко С.П. Курс теории упругости. Киев: Наукова думка, 1972. 501 с.
- [14] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
- [15] Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН. 1971. Т.26. вып. 4(160). С. 15–41.
- [16] Справочник по специальным функциям. / Под ред. М. Абрамовица и И.М. Стиган : Наука, 1979. 830 с.



**NON-STATIONARY VIBRATION OF AGING  
VISCOELASTIC ROD<sup>7</sup>**© 2003 S.A. Lychev<sup>8</sup>

In the present study an experimental technique for estimation of internal friction in viscoelastic aging material is developed. In the course of the experiment the dynamical reaction of rotating bending rod caused by non-stationary loading is determined. The mathematical model of the experiment is discussed in two variants: refined technical theory of viscoelastic rod, taking account of the inertia of section rotation; and Timoshenko theory, taking account of the shear strain. The spectral analysis of corresponding pencils generated by non-self-adjointed differential operators is given, the spectral decompositions of displacements of rod, made from time invariant viscoelastic and linear aging materials, are obtained.

Поступила в редакцию 20/VI/2003  
в окончательном варианте — 20/VII/2003

---

<sup>7</sup> Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Yu.N. Radayev.

<sup>8</sup> Lychev Sergey Alexandrovitch, Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.