ИЗГИБ ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

© 2005 С.В. Салеев, С.А. Лычев[1]

Задача о поперечном изгибе прямоугольной пластины имеет давнюю историю. Первые исследования изгиба пластин были осуществлены Хладни и носили экспериментальный характер. Им были получены узловые линии колеблющихся пластинок. Попытка теоретического обоснования результатов Хладни была предпринята Яковом Бернулли (младшим), который рассматривал пластину как двойной слой брусьев, пересекающихся под прямым углом. Бернулли получил уравнение колебаний, но оно оказалось неверным. В 1809г. Французская Академия наук предложила в качестве темы для работы на премию задачу о тонах колеблющейся пластины. В числе прочих на соискание премии было представлено исследование Софи Жермен. Работа содержала ошибочные промежуточные результаты, но окончательный результат - уравнение поперечных колебаний оказался верным. Ошибки были исправлены членом экспертной комиссии Ж.Лагранжем, а С.Жермен премирована в 1815г. Первое решение задачи об изгибе шарнирно опертой прямоугольной пластины принадлежит Навье, который представил доклад на эту тему во Французскую Академию наук в 1820г. В течение последующих двух десятилетий Коши и Пуассон занимались теорией изгиба пластин исходя из трехмерной теории упругости и полагали, что все определяемые величины могут быть разложены в ряды по степеням малого параметра - толщины пластины. Такие построения приводили к краевым задачам с избыточным числом краевых условий. Кирхгоф в 1850г. показал, что появление "лишних" краевых условий связано с противоречиями в принимаемых гипотезах. Используя вариационный принцип и кинематические гипотезы, теперь носящие его имя, он сформулировал краевые задачи для пластин при различных способах закрепления. Дальнейший прогресс сдерживался отсутствием, за исключением решения Навье, точных решений. В 1899г. М.Леви предложил разыскивать решение в виде однократного ряда специального вида. Им были получены точные решения для пластин, шарнирно закрепленных по двум противоположным сторонам и произвольно - по двум другим. Чуть позже, в 1900г., Эстанаве показал, что, выполняя однократное суммирование в аналитической форме, возможно преобразовать решение Навье к частному случаю решения Леви.

Решение задачи о прогибе жестко защемленной пластины впервые было построено в 1902г. Кояловичем. Краевая задача сводится к бесконечномерной системе линейных алгебраических уравнений, для которой Коялович сформулировал алгоритм приближенного решения и математически обосновал его сходимость [1].

Приближенные методы решения соответствующей прямой вариационной задачи, приводящие её к бесконечномерной алгебраической системе, были предложены Ритцем в 1904г. и в последствии развиты Бубновым и Генки. Бубновым были составлены обширные таблицы, сыгравшие значительную роль в инженерном деле. Вместе с тем, вопрос о построении «точных» решений остается открытым.

В работе построено решение задачи об изгибе жестко защемленной прямоугольной пластины, представленное в форме разложений по специальным базисным функциям, удовлетворяющим заданным краевым условиям и специальному соотношению ортогональности, структура которого определяется функционалом потенциальной энергии системы. При этом коэффициенты разложений вычисляются точно, т.е. из соотношений, записываемых в конечном виде. Это позволяет, по мнению авторов, называть предложенное представление «точным».

Рассмотрим прямоугольную жестко защемленную пластину со сторонами a и b. Тогда для вычисления её прогибов в прямоугольной области $D=[0,a]\times[0,b]$

[1]Салеев Сергей Владимирович, эл.почта: sergey.saleev@gmail.com, Лычев Сергей Александрович, эл.почта: liychev@ssu.samara.ru, кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, г.Самара, ул. Акад. Павлова, 1

рассматривается краевая задача

$$\nabla^2\nabla^2 w = f, \quad w\big|_{\partial D} = \mathbf{n}\cdot\nabla w\big|_{\partial D} = 0. \tag{1}$$

Здесь f - заданная распределенная по поверхности пластины нормальная нагрузка, w - искомая функция прогибов, $\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla$, ∇ - оператор Гамильтона, ∂D - граница области, $\mathbf{n}$ - единичная нормаль к границе ∂D.

Полагаем, что функция w принадлежит пространству $L_2(D)$ функций, интегрируемых с квадратом в области D. Тогда краевой задаче (1) соответствует вариационная задача

$$\Pi = \int_D \left\{\frac{1}{2}\left(\nabla^2 w\right)^2 - f\,w\right\} dD, \quad w \in D, \quad \delta\Pi = 0, \tag{2}$$

где D обозначает множество допустимых функций, определяемое краевыми условиями задачи (1):

$$D \subset L_2(D), \quad D = \{w \mid w\big|_{\partial D} = \mathbf{n}\cdot\nabla w\big|_{\partial D} = 0\}. \tag{3}$$

Таким образом, функция $w \in D$, удовлетворяющая вариационному уравнению

$$\delta\left[\frac{1}{2}\int_D \left(\nabla^2 w\right)^2 dD - \int_D f\,w\,dD\right] = 0, \tag{4}$$

является решением краевой задачи (1).

Пусть система функций $w_k(x,y)$ образует базис пространства $L_2(D)$. Тогда разыскиваемая функция $w(x,y)$ может быть представлена в форме разложения по этому базису

$$w(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k w_k(x,y), \tag{5}$$

Подстановка представления (5) в уравнение (4) приводит к системе уравнений относительно коэффициентов Фурье α_k:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\alpha_i \int_D \nabla^2 w_i\, \nabla^2 w_k\, dD\right] - \int_D f\, w_k\, dD = 0. \tag{6}$$

В общем случае (6) представляет собой бесконечномерную связанную систему уравнений. *Однако, её можно преобразовать к последовательности несвязанных уравнений за счет выбора специального базиса* w_k. Действительно, если базисные функции $w_k(x,y)$ удовлетворяют условию обобщенной ортонормальности

$$\int_D \nabla^2 w_k(\xi,\zeta)\nabla^2 w_p(\xi,\zeta)\, d\xi d\zeta = \delta_{pk}, \tag{7}$$

то система (6) распадается на двучленные уравнения, и коэффициенты искомого разложения могут быть вычислены следующим образом:

$$\alpha_k = \int_D f(\xi,\zeta)\, w_k(\xi,\zeta)\, d\xi d\zeta. \tag{8}$$

Из соотношений (5), (8) получаем выражения прогибов пластины

$$w(x,y) = \int_D K(\xi,\zeta;x,y) f(\xi,\zeta)\, d\xi d\zeta, \quad K(\xi,\zeta;x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(\xi,\zeta) w_k(x,y). \tag{9}$$

Отметим, что выражения (9) определяются бесконечным числом слагаемых, каждое их которых может быть выписано в явном виде. Такие представления решений называются замкнутыми. В этой связи для построения замкнутого решения краевой задачи (1) достаточно получить в конечном аналитическом виде базисные функции w_k.

Для построения w_k может быть использована специальная модификация метода ортогонализации Грама-Шмидта, предложенная Г.Я. Поповым [2]. Вводится вспомогательная система функций $\psi_k(x,y)\in D$, образующая базис в $L_2(D)$. По ним строится система функций $w_k(x,y)$ следующим образом:

$$w_k=\frac{1}{N_k}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{k1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{1k-1} & b_{2k-1} & \cdots & b_{kk-1}\\ \psi_1 & \psi_2 & \cdots & \psi_k\end{vmatrix},\quad b_{nm}=\int_D \nabla^2\psi_n(\xi,\zeta)\nabla^2\psi_m(\xi,\zeta)\,d\xi d\zeta, \tag{10}$$

$$N_k=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{k1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{1k-1} & b_{2k-1} & \cdots & b_{kk-1}\\ b_{1k} & b_{2k} & \cdots & b_{kk}\end{vmatrix}.$$

При этом $w_k(x,y)$ также образует базис в $L_2(D)$, причем его элементы удовлетворяют условию ортонормальности (7) [2]. Для реализации вычислительного алгоритма важно, что явные формулы (10) могут быть преобразованы в рекурсивные:

$$\begin{gathered}\mathring{w}_1=\psi_1,\quad \mathring{w}_n=\psi_n-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\int_D \nabla^2\psi_n(\xi,\zeta)\nabla^2\mathring{w}_j(\xi,\zeta)\,d\xi d\zeta}{\int_D\left(\nabla^2\mathring{w}_j(\xi,\zeta)\right)^2 d\xi d\zeta}\mathring{w}_j,\\ w_k=\frac{\mathring{w}_k}{\sqrt{\int_D\left(\nabla^2\mathring{w}_k(\xi,\zeta)\right)^2 d\xi d\zeta}}.\end{gathered} \tag{11}$$

В качестве вспомогательного базиса предлагается использовать систему функций

$$\psi_k(x,y)=\phi_m\left(\frac{x}{a}\right)\phi_n\left(\frac{y}{b}\right),\quad (m,n=1,\ldots,\infty),\quad k=\frac{(m+n-1)^2+m-n-1}{2},$$

где $\phi_n(x)$ - счетное множество решений двухточечной краевой задачи

$$\phi_n^{(4)}+\lambda_n^4\phi_n=0,\quad \phi(0)=\phi(1)=\phi'(0)=\phi'(1)=0. \tag{12}$$

Ясно, что $\psi_k(x,y)\in D$. Собственные значения λ_n вычисляются как корни трансцендентного уравнения

$$\cosh(\lambda_n)\cos(\lambda_n)-1=0. \tag{13}$$

Приближенные решения уравнения (13) могут быть найдены численными методами. Следует отметить, что для значений $\lambda_n \gg 1$, уравнение (13) асимптотически вырождается в уравнение $\cos\lambda_n=0$, и для значений λ_n могут быть получены асимптотические выражения:

$$\lambda_n=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z.$$

Функции ϕ_n, являясь решениями дифференциального уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами, имеют вид

$$\begin{gathered}\phi_n(x)=e^{-\lambda_n}\left[\sin(\lambda_n(1-x))+\cosh(\lambda_n)\sinh(\lambda_n x)-\cos(\lambda_n x)\sinh(\lambda_n)+\right.\\ \left.\sinh(\lambda_n(1-x))+\cos(\lambda_n)\sinh(\lambda_n x)-\cosh(\lambda_n x)\sin(\lambda_n)\right],\end{gathered} \tag{14}$$

а коэффициенты b_{nk} могут быть вычислены по явным формулам:

$$b_{km}=\frac{2}{ab}J_1(p_k,p_m)J_1(q_k,q_m)+\delta_{km}J_2(p_k)J_2(q_m)\left(\frac{b}{a^3}\lambda_{p_k}^4+\frac{a}{b^3}\lambda_{q_m}^4\right),$$

где

$$J_1(k,m)=\begin{cases} J_3(k), & k=m; \\ 0, & k+m=2n+1, n\in Z; \\ J_4(k,m), & k\neq m \wedge k+m=2n, n\in Z; \end{cases}$$

$$J_2(k)=e^{-2\lambda_k}(\sin(\lambda_k)-\sinh(\lambda_k))^2,$$

$$J_3(k)=\frac{1}{32}e^{-2\lambda_k}\lambda_k\sec^2\lambda_k[16\lambda_k-64\cos(\lambda_k)\sinh(\lambda_k)\sin^2\lambda_k+$$
$$+4\lambda_k\left(\cos(4\lambda_k)-2\sec^2\lambda_k-4\cos(2\lambda_k)\right)+10\sin(2\lambda_k)-$$
$$-7\sin(4\lambda_k)+\cosh(2\lambda_k)\left(4\lambda_k+2\sin(2\lambda_k)+\sin(4\lambda_k)\right)],$$

$$J_4(k,m)=8\frac{\lambda_k^2\lambda_m^2e^{-\lambda_k-\lambda_m}}{\lambda_k^4-\lambda_m^4}\left(\left(\lambda_m\sin\lambda_m-\lambda_k\sin\lambda_k\right)\sinh\lambda_n\lambda_k+\right.$$
$$\left.\sin\lambda_k\sin\lambda_m\left(\lambda_k\lambda_k-\lambda_m\lambda_m\right)\right),$$

$$p_m=\frac{\alpha_m^2+3\alpha_m}{2}-m+2,\quad q_m=m-\frac{\alpha_m^2+\alpha_m}{2},\quad \alpha_m=\left\lfloor -\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{7}{4}+2m}\right\rfloor.$$

Поскольку $\phi_n(x)$ - конечные выражения, определяемые через элементарные функции, то $\psi_k(x,y)$ принимают вид конечных гиперболо-тригонометрических полиномов.

Список литературы

[1] *Тимошенко С.П.*, *Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. М.:Наука, 1966. - 635 с.

[2] *Попов Г.Я.* Биортогональные разложения в задачах механики. Прикладная математика и механика, т. 43 вып. 4. С. 698 - 708.